

◇◇ <空間図形 円すいの中心角・表面積> No.1 ◇◇

※立体の見取図・展開図は「イメージ」です。長さの比や角度などは必ずしも正確には描かれていません。

【1】右図の円すい(母線の長さ5cm、底面の半径3cm)について、次の問いに答えなさい。


(1) 側面のおうぎ形の中心角を求めなさい。


◇◇ この公式をまず覚えてね! 「おうぎ形の弧の長さ」を求める公式 ◇◇ 5cm

$$l = 2\pi r \times \frac{a}{360} \quad (\text{エルイコールに一パイアールかける360ぶんのエー})$$

◇lは「おうぎ形の弧の長さ」 rは「おうぎ形の半径」 aは「おうぎ形の中心角」だよ! ◇

さて…まず右の展開図を見てね。

円すいの展開図の中には、おうぎ形()と、円(O)があるよね。

おうぎ形()について、上の $l = \dots$ の公式で式を作ってみると、

$$l = 2\pi \times 5 \times \frac{a}{360} = 10\pi \times \frac{a}{360} = \frac{\pi a}{36} \quad \leftarrow 10 \text{ と } 360 \text{ を約分したよ!}$$

これは「おうぎ形の弧の長さ」なので、展開図の**水色の線**の長さ。

ところで…

この水色の線と、オレンジ色の線は、同じ長さだよね!! (←ポイント)

組み立てて円すいにした時に、ぴったり重なるもんね! (^▽^)b

この**オレンジ色の線**は、底面の円のまわりの長さ(円周)なので、

$$\text{円周} = \text{直径} \times \pi = \text{半径} \times 2 \times \pi = 3 \times 2 \times \pi = 6\pi$$

これが、さっきの「おうぎ形の弧の長さ」(水色の線)と同じ長さなので、

$$\frac{\pi a}{36} = 6\pi \quad \leftarrow \text{ここ!ここ最大のポイント!!}$$

同じ長さの2つのもの(水色の線とオレンジ色の線)を、イコールで結んで1つの式にしたよ(≧▽≦)

あとはこの式を、最後に $a = \square$ という値が出るように、方程式として解いていこう(^o^)φ♪

$$\frac{\pi a}{36} = 6\pi \quad \checkmark \text{ 左辺に「a」だけ残すために、36と}\pi\text{をこのようかけよう。右辺にも同じものを必ずかけてね!}$$

$$\frac{\pi a}{36} \times \frac{36}{\pi} = 6\pi \times \frac{36}{\pi} \quad \checkmark \text{ この「a」が、「おうぎ形の中心角」!}$$



$$a = 216 \quad (\pi \text{ と } \pi \text{ は約分されて1と1になるよ}) \quad \left(\quad \quad \quad \color{red}{216^\circ} \quad \quad \right)$$

【別解】


側面のおうぎ形の弧の長さ=水色の線=オレンジ色の線=底面の円のまわりの長さ(円周) なので、

$$\text{円周} = \text{直径} \times \pi = \text{半径} \times 2 \times \pi = 3 \times 2 \times \pi = 6\pi = \text{の弧の長さ(水色の線)}$$

◇ ポイントとなる考え方 ◇

“もし、この  が、 (一部欠けているおうぎ形ではなく、完全な「円」)だったとしたら…” >(・▽・)

$$\text{その円}\langle \text{circle symbol} \rangle \text{の円周} = \text{直径} \times \pi = \text{半径} \times 2 \times \pi = 5 \times 2 \times \pi = 10\pi$$

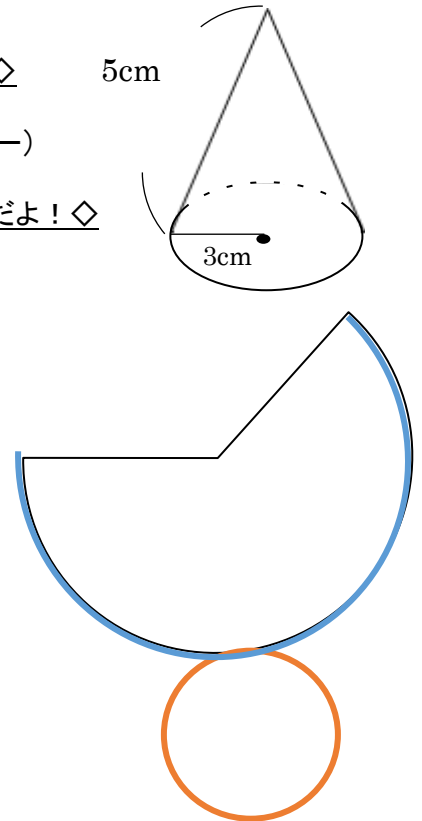
だけど実際は、完全な円じゃなく、一部分が欠けているおうぎ形  だよ。

$$\hookrightarrow \text{このことを式で表すと、こうなる!} \rightarrow \frac{6\pi \text{ (実際は一部分だけ)}}{10\pi \text{ (完全な円だったら)}} = \frac{\chi \text{ (実際のおうぎ形の中心角)}}{360 \text{ (完全な円である場合の中心角)}}$$

あるいは、 $6\pi : 10\pi = \chi : 360$ というように「比例式」を作ってもいいよ!

どちらを解いても、 $\chi = 216$ となります。これが、側面のおうぎ形の中心角(^o^)b

◇◇ ふたばプリント ◇◇



(2) この円すいの表面積を求めなさい。

◇◇ この公式をまず覚えてね！「おうぎ形の面積」を求める公式 ◇◇

$$S = \pi r^2 \times \frac{a}{360} \quad (\text{エスイコールパイアールにじょうかける360ぶんのエー})$$

$$S = \frac{1}{2} \ell r \quad (\text{エスイコールにぶんのいちエルアール})$$

◇Sは「おうぎ形の面積」 rは「おうぎ形の半径」 aは「おうぎ形の中心角」だよ。ℓは「おうぎ形の弧の長さ」ね。◇
円すいの側面のおうぎ形()の面積は、このどちらの公式でも求めることができるよ。

1つめの公式: $S = \pi r^2 \times \frac{a}{360} = \pi \times 5^2 \times \frac{216}{360} = 25\pi \times \frac{3}{5} = 15\pi$ ←約分が大変かな？

2つめの公式: $S = \frac{1}{2} \ell r = \frac{1}{2} \times 6\pi$ (おうぎ形の弧の長さ=水色の線=オレンジ色の線=底面の円周) $\times 5$
 $= \frac{1}{2} \times 30\pi = 15\pi$ ← 約分などを考えると、 $\frac{1}{2} \ell r$ の公式で求めたほうが簡単かもね♪

あとは、底面の円(O)の面積を求めて(半径×半径×π=3×3×π=9π)、

() の面積と O の面積を合わせれば完成！ → $15\pi + 9\pi = (24\pi \text{ cm}^2)$

【2】右図の円すい(母線の長さ6cm、底面の半径2cm)について、次の問いに答えなさい。

(1) 側面のおうぎ形の中心角を求めなさい。

おうぎ形()について、ℓ=… の公式で式を作ってみると、

$$\ell = 2\pi \times 6 \times \frac{a}{360} = 12\pi \times \frac{a}{360} = \frac{\pi a}{30} \quad \leftarrow 12 \text{ と } 360 \text{ を約分したよ！}$$

この水色の線(おうぎ形の弧の長さ)と、

オレンジ色の線(底面の円のまわりの長さ(円周))が同じ長さなので、

$$\text{円周} = \text{直径} \times \pi = \text{半径} \times 2 \times \pi = 2 \times 2 \times \pi = 4\pi$$

$$\frac{\pi a}{30} = 4\pi \rightarrow \text{同じ長さの2つのもの(水色の線とオレンジ色の線)を、}$$

イコールで結んで1つの式にしてね(^o^)

$$\frac{\pi a}{30} \times \frac{30}{\pi} = 4\pi \times \frac{30}{\pi} \quad a = 120 \quad (120^\circ)$$

【別解】考え方は、【1】(1)の ポイントとなる考え方 を参照してね。

$$\frac{4\pi \text{ (実際は一部分だけ)}}{12\pi \text{ (完全な円だったら)}} = \frac{\chi \text{ (実際のおうぎ形の中心角)}}{360 \text{ (完全な円である場合の中心角)}}$$

あるいは $4\pi : 12\pi = \chi : 360$ というように比例式を作ろう。これらを解くと $\chi = 120$ (^o^)

(2) この円すいの表面積を求めなさい。

側面のおうぎ形の面積を、 $S = \frac{1}{2} \ell r$ の公式で求めてみると、

$$S = \frac{1}{2} \times 4\pi \text{ (おうぎ形の弧の長さ=水色の線=オレンジ色の線=底面の円周)} \times 6 = \frac{1}{2} \times 24\pi = 12\pi$$

あとは、底面の円(O)の面積を求めて(半径×半径×π=2×2×π=4π)、

() の面積と O の面積を合わせれば完成！ → $12\pi + 4\pi = (16\pi \text{ cm}^2)$

ℓの公式とSの公式、最初はつかみづらいかな？ ◇◇ ふたばプリント ◇◇ 慣れてぜひ使いこなしたいね！練習練習♪

